1. Векторные расслоения

Определение 1.1. *(Непрерывным) семейством (вещественных) векторных пространств* над топологическим пространством X называется пространство E (*тотальное пространство семейства*) вместе с (непрерывным) отображением $\pi\colon E \to X$, снабженное

(1) сложением $+\colon E \times_X E \to E$ (через $E \times_X E$ обозначается расслоенное произведение E и E над X, т.е. подпространство $E \times E$, состоящее из пар (v, w) таких, что $\pi(v) = \pi(w)$),
(2) умножением на скаляры $\cdot\colon \mathbb{R} \times E \to E$,

такими, что все операции послойны, т.е. $\pi(v + w) = \pi(v) = \pi(w)$, $\pi(a \cdot v) = \pi(v)$, $\pi(z(x)) = x$, и задают на каждом слое $E_x := \pi^{-1}(x)$ структуру (вещественного) векторного пространства.

Пример 1.2. Тривиальное семейство векторных пространств $\mathbb{1}_X^k := \mathbb{R}^k \times X$ вместе со сложением, умножением на скаляры индуцированными с $\mathbb{R}^k$.

Определение 1.3. *Векторным расслоением* называется локально тривиальное семейство конечномерных векторных пространств, т.е. такое семейство $\pi\colon E \to X$, что существует открытое покрытие $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ и изоморфизмы (т.е. гомеоморфизмы, уважающие операции) $E|_{U_\alpha} \cong \mathbb{R}^{k_\alpha} \times U_\alpha$, где $E|_{U_\alpha} := \pi^{-1}(U_\alpha)$ – сужение векторного расслоения на U_α.

Упражнение 1.4. Проверьте, что для связного пространства X и векторного расслоения $\pi\colon E \to X$ число $\dim E_x$ не зависит от точки выбора $x \in X$. Это число называется *рангом* векторного расслоения E и обозначается $\operatorname{rank} E$.

Определение 1.5. *Сечением* векторного расслоения $\pi\colon E \to X$ называется отображение $s\colon X \to E$ такое, что $\pi \circ s(x) = x$ для любого $x \in X$. Нигде не нулевым сечением называется такое сечение, что $s(X) \cap z(X) = \emptyset$, где z – нулевое сечение.

Упражнение 1.6. Докажите, что для того, чтобы векторное расслоение $\pi\colon E \to X$ ранга k было тривиальным (т.е. изоморфно $\mathbb{R}^k \times X$) необходимо и достаточно, чтобы существовало k сечений $s_1, s_2, \ldots, s_k$ таких, что $s_1(x), s_2(x), \ldots, s_k(x)$ линейно независимы в E_x для любого $x \in X$.

Упражнение 1.7. Пусть $E = {}^{(\mathbb{R} \times [0,1])}\big/_{((v,0) \sim (-v,1))}$ – (открытый) лист Мёбиуса. Определим проекцию $\pi\colon E \to S^1$, $\pi(v, x) = x \in {}^{[0,1]}\big/_{0 \sim 1} = S^1$. Тривиально ли это линейное расслоение (операции индуцированы с $\mathbb{R}$)?

Упражнение 1.8. Опишите все линейные расслоения над S^1 (с точностью до изоморфизма).

Упражнение 1.9. Докажите, что любое расслоение ранга 2 над S^1 имеет нигде не нулевое сечение.

Упражнение 1.10. Покажите, что классов изоморфизма линейных расслоений над X столько же, сколько классов изоморфизма двулистных накрытий X.

Упражнение 1.11. Опишите все линейные расслоения над двумерным тором T (с точностью до изоморфизма).

Определение 1.12. *Проективным пространством* $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ называется многообразие прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат:

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n = {}^{(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})}\big/_{\{(x_0, \ldots, x_n) \sim (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}}.$$

Грассманианом $\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(k, n)$ называется многообразие подпространств размерности k в $\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(k, n) = {}^{M_{\mathbb{R}}^o(k,n)}\big/_{\{AX \sim X \mid A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})\}},$$

где $M^{\circ}_{\mathbb{R}}(k,n)$ – множество матриц размера $k\times n$ и ранга k. Проективное пространство $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ – это грассманиан $\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(1,n+1)$. *Тавтологическим расслоением* над грассманианом называется векторное расслоение $\mathcal{T}_{k,n} := \{(v,h)\in\mathbb{R}^n\times\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(k,n)\,|\,v\in h\}\to\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(k,n), (v,h)\mapsto h$ (проверьте, что оно локально тривиально). Тавтологическое расслоение над проективным пространством обозначается $\mathcal{O}_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n}(-1)$.

Упражнение 1.13. Имеют ли нигде не нулевые сечения следующие расслоения:

(1) тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$,
(2) тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$,
(3) * тавтологическое расслоение над $\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(k,n)$,
(4) * тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, рассмотренное как вещественное расслоение?

Определение 1.14. Пусть X – гладкое многообразие, вложенное в $\mathbb{R}^n$. Тогда *касательное расслоение* к X можно реализовать как $T_X=\{(\frac{d\gamma}{dt}(0),x)\,|\,\gamma\colon\mathbb{R}\to X,\gamma(0)=x\}\subset\mathbb{R}^n\times X$, т.е. слой над точкой x – это пространство векторов скоростей в точке x кривых на многообразии.

Упражнение 1.15. Покажите, что касательные расслоения к следующим пространствам тривиальны:

(1) окружности S^1,
(2) двумерному тору T,
(3) S^3,
(4) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$,
(5) S^7.

Упражнение 1.16. * Покажите, что касательное расслоение к сфере S^2 не имеет нигде не нулевых сечений.

Упражнение 1.17. Покажите, что касательное расслоение к S^{2n-1} имеет нигде не нулевое сечение.

2. Коциклы и главные G-расслоения

Определение 2.1. Рассмотрим открытое покрытие $X=\bigcup_\alpha U_\alpha$.

Чеховским 1-коциклом покрытия $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_\alpha$ с коэффициентами в GL_k называется набор матриц $g_{\alpha\beta}\in\mathrm{GL}_k(C_{\mathbb{R}}(U_\alpha\cap U_\beta))$ таких, что $g_{\beta\gamma}\cdot g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\gamma}\in\mathrm{GL}_k(C_{\mathbb{R}}(U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma))$. Два коцикла g,g' называются эквивалентными если найдется набор матриц $h_\alpha\in\mathrm{GL}_k(C_{\mathbb{R}}(U_\alpha))$ таких, что $h_\beta^{-1}\cdot g_{\alpha\beta}\cdot h_\alpha=g'_{\alpha\beta}$.

Когомологиями Чеха покрытия $\mathcal{U}$ называется множество $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U},\mathrm{GL}_k)$ классов эквивалентности 1-коциклов. Несложно видеть, что для измельчения $\mathcal{U}'$ покрытия $\mathcal{U}$ имеется естественное отображение $r_{\mathcal{U},\mathcal{U}'}\colon\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U},\mathrm{GL}_k)\to\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}',\mathrm{GL}_k)$.

Когомологиями Чеха пространства X с коэффициентами в $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ называется предел

$$\check{\mathrm{H}}^1(X,\mathrm{GL}_k)=\varinjlim_{\mathcal{U}}\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U},\mathrm{GL}_k)$$

(т.е. дизъюнктное объединение $\bigsqcup\limits_{\mathcal{U}}\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U},\mathrm{GL}_k)$, профакторизованное по отношению эквивалентности $g\sim r_{\mathcal{U},\mathcal{U}'}(g)$ по всем измельчениям $\mathcal{U}'\leq\mathcal{U}$). Можно показать, что для хорошего топологического пространства X (например, клеточного комплекса) и хорошего покрытия $\mathcal{U}$ (компоненты связности всех пересечений конечного числа U_α стягиваемы) имеет место равенство $\check{\mathrm{H}}^1(X,\mathrm{GL}_k)=\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U},\mathrm{GL}_k)$.

Упражнение 2.2. Пусть $\pi\colon E\to X$ – векторное расслоение ранга k и $X=\bigcup_\alpha U_\alpha$ – тривиализующее покрытие вместе с выбранными изоморфизмами $\varphi_\alpha\colon\mathbb{R}^k\times U_\alpha\xrightarrow{\simeq}E|_{U_\alpha}$. Проверьте, что набор отображений

$$g_{\alpha\beta} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha \colon \mathbb{R}^k \times (U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathbb{R}^k \times (U_\alpha \cap U_\beta)$$

задает элемент $g \in \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, \mathrm{GL}_k)$. Докажите, что описанная процедура устанавливает биекцию между множеством классов изоморфизма векторных расслоений и $\check{\mathrm{H}}^1(X, \mathrm{GL}_k)$.

Упражнение 2.3. Опишите коцикл, задающий лист Мёбиуса как линейное расслоение над окружностью.

Упражнение 2.4. Все стандартные операции над векторными пространствами (взятие прямой суммы, двойственного, тензорного произведения, внешних степеней, векторного пространства гомоморфизмов) можно делать и с векторными расслоениями, выполняя их послойно. Что происходит с коциклами при этих операциях?

Упражнение 2.5. Покажите, что слой касательного расслоения в точке $l \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ изоморфен пространству линейных отображений из l в $\mathbb{R}^{n+1}/l$, а само расслоение изоморфно $\mathcal{H}om(\mathcal{O}(-1), \mathbb{1}^{n+1}/\mathcal{O}(-1))$. Опишите коцикл, задающий это расслоение.

Упражнение 2.6. Покажите, что слой касательного расслоения в точке $h \in \mathrm{Gr}_\mathbb{R}(k, n)$ изоморфен пространству линейных отображений из h в $\mathbb{R}^n/h$.

Определение 2.7. Векторное расслоение $\pi \colon E \to X$ ранга k называется *ориентируемым*, если линейное расслоение $\det E := \Lambda^k E$ тривиально. Гладкое многообразие называется *ориентируемым*, если его касательное расслоение ориентируемо.

Упражнение 2.8. Пусть E_1 и E_2 – векторные расслоения ранга k и n над X. Выразите $\det(E_1 \oplus E_2)$ через $\det E_1$ и $\det E_2$.

Упражнение 2.9. Докажите, что расслоение $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ над $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ тривиально.

Упражнение 2.10. Докажите, что расслоение ориентируемо тогда и только тогда, когда его можно задать коциклом со значениями в GL_n^+ (т.е. $\det g_{\alpha\beta} > 0$).

Упражнение 2.11. Проверьте, что любое комплексное векторное расслоение, рассмотренное как вещественное, ориентируемо.

Упражнение 2.12. Какие из вещественных проективных пространств ориентируемы?

Определение 2.13. Рассмотрим топологическую группу G. *Главным G-расслоением* над X называется пространство $\mathcal{E}$ вместе с проекцией $\pi \colon \mathcal{E} \to X$ и послойным действием $m \colon G \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ (т.е. $\pi \circ m(g, a) = \pi(a)$) такими, что существует открытое покрытие $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ вместе с изоморфизмами (гомеоморфизмами, согласованными с действием группы) $\mathcal{E}|_{U_\alpha} \cong G \times U_\alpha$.

Упражнение 2.14. Положим $S^n_\mathbb{C} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n \,|\, |x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, $S^n_\mathbb{H} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n \,|\, |x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = 1\} \subset \mathbb{H}^{n+1}$. Проверьте, что естественные проекции $S^n_\mathbb{C} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ и $S^n_\mathbb{H} \to \mathbb{H}\mathrm{P}^n$ обладают структурами главных S^1 и S^3-расслоений соотвественно. В частности, при $n = 1$ получаем расслоения Хопфа $S^3 \mapsto S^2$ и $S^7 \mapsto S^4$ со слоями S^1 и S^3 соответственно.

Замечание 2.15. Аналогичным образом используя октонионы можно получить расслоения $S^{15} \to S^8$ и $S^{23} \to \mathbb{O}P^2$ со слоями S^7 (октонионные проективные пространства размерности больше 2 уже не определить естественным образом в виду отсутствия ассоциативности).

Упражнение 2.16. *Сечением* главного G-расслоения $\pi \colon \mathcal{E} \to X$ называется отображение $s \colon X \to \mathcal{E}$ такое, что $\pi \circ s(x) = x$ для любого $x \in X$. Покажите, что главное G-расслоение тривиально (т.е. изоморфно $G \times X$) тогда и только тогда, когда у него существует сечение.

Упражнение 2.17. Проверьте, что любой гомоморфизм главных G-расслоений над X (т.е. непрерывное отображение, согласованное с действием группы) является изоморфизмом.

Упражнение 2.18. Дайте определение первых когомологий Чеха с коэффициентами в группе G (достаточно заменить везде $\mathrm{GL}_k(C_{\mathbb{R}}(U_\alpha \cap U_\beta))$ на множество непрерывных отображений из $U_\alpha \cap U_\beta$ в G) и покажите, что множество $\check{\mathrm{H}}^1(X, G)$ биективно множеству классов изоморфизма главных G-расслоений над X.

Замечание 2.19. Верно более общее тавтологическое наблюдение. Можно определить, что такое локально тривиальное расслоение со слоем F, снабженным некоторой структурой (векторного пространства, главного G-множества, однородного G-множества, etc.). Тогда классы изоморфизма таких объектов описываются как $\check{\mathrm{H}}^1(X, Aut(F))$, где $Aut(F)$ – группа автоморфизмов F, сохраняющих выбранную структуру. Например, $\check{\mathrm{H}}^1(X, \mathrm{S}_n)$ классифицирует n-листные накрытия, $\check{\mathrm{H}}^1(X, \mathrm{O}_n)$ описывает векторные расслоения с выбранным послойным скалярным произведением, а $\check{\mathrm{H}}^1(X, \mathrm{Sp}_{2n})$ классифицирует симплектические расслоения.

Упражнение 2.20. С любым векторным расслоением $\pi\colon E \to X$ ранга k можно связать *расслоение оснащений (frame bundle)* $F(E) := \mathcal{I}so(\mathbb{1}_X^k, E)$, где $\mathcal{I}so$ – расслоение, слой которого над точкой x – это множество изоморфизмов между $\mathbb{R}^k$ и E_x, т.е. множество всех возможных базисов в E_x. Проверьте, что $F(E)$ является главным $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$-расслоением над X относительно действия, индуцированного с $\mathbb{1}_X^k$, и что соответствие $E \mapsto F(E)$ устанавливает биекцию между классами изоморфизма векторных расслоений ранга k и классами изоморфизма главных $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$-расслоений.

Упражнение 2.21. Покажите, что $F(\mathcal{O}_{\mathbb{RP}^n}(-1)) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Упражнение 2.22. Покажите, что $F(\mathcal{T}_{k,n}) = M^o_{\mathbb{R}}(k, n)$.

Факт 2.23. Рассмотрим группу Ли G и замкнутую подгруппу H такие, что естественное вложение $i\colon H \to G$ – деформационный ретракт (т.е. существует отображение $f\colon G \times [0,1] \to G$ такое, что $f(g, 0) = g$, $f(g, 1) \in H$, $f(h, 1) = h$ для всех $g \in G, h \in H$). Тогда i индуцирует биекцию $\check{\mathrm{H}}^1(X, H) \cong \check{\mathrm{H}}^1(X, G)$ для паракомпактного X (например, для клеточного комплекса).

Упражнение 2.24. Докажите, что вложение $i\colon \mathrm{O}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ – деформационный ретракт (вспомните процесс ортогонализации Грама-Шмидта) и выведите отсюда, что любое векторное расслоение над клеточным комплексом можно снабдить послойным скалярным произведением (единственным с точностью до изоморфизма образом).

Упражнение 2.25. Для векторного расслоения со скалярным произведением определите расслоение ортонормированных оснащений $F_o(E)$ и покажите, что $F_o(T_{S^n}) = O_{n+1}$.

Упражнение 2.26. Докажите, что вложение $i\colon \mathrm{U}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ – деформационный ретракт и выведите отсюда, что любое комплексное векторное расслоение клеточным комплексом можно снабдить послойным (эрмитовым) скалярным произведением.

Упражнение 2.27. Покажите, что вложение $i\colon \{-1, 1\} \to \mathbb{R}^*$ – деформационный ретракт и выведите отсюда упражнение 1.10 для клеточного комплекса.

3. Гомотопическая классификация векторных расслоений

Определение 3.1. Пусть $\pi\colon E \to X$ – векторное расслоение и $f\colon Y \to X$ – непрерывное отображение. Тогда $f^*E := E \times_X Y$ обладает естественной структурой векторного расслоения над Y. Здесь $E \times_X Y$ – расслоенное произведение E и Y над X, т.е. множество пар $(v, y) \in E \times Y$ таких, что $\pi(v) = f(y)$.

Упражнение 3.2. Пусть $f\colon S^1 \to S^1$ – двулистное накрытие. Проверьте, что f^*E тривиально для линейного расслоения E, соответствующего листу Мёбиуса.

Упражнение 3.3. Пусть $\pi\colon E \to X$ – векторное расслоение. Обозначим $p\colon E^0 \to X$ проекцию дополнения к нулевому сечению на X. Проверьте, что расслоение p^*E имеет нигде не нулевое сечение.

Соглашение 3.4. Начиная с этого момента все рассматриваемые топологические пространства предполагаются паракомпактными (т.е. для любого открытого покрытия $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ есть разбиение единицы: набор функций $\phi_\alpha\colon X \to [0,1]$ таких, что носитель ϕ_α содержится в U_α и $\sum_\alpha \phi_\alpha = 1$). Для таких пространств верен следующий несложный технический факт: для любого открытого покрытия $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ найдется счетное открытое покрытие $X = \bigcup_\beta V_\beta$ такое, что каждое V_k является дизъюнктным объединением открытых подмножеств некоторых U_α (и соответствующее разбинение единицы).

Упражнение 3.5.

(1) Пусть E – векторное расслоение над $X \times [a,b]$, тривиальное над $X \times [a,c]$ и $X \times [c,b]$ для некоторого $c \in (a,b)$. Тогда E тривиально.
(2) Пусть E – векторное расслоение над $X \times [0,1]$. Покажите, что найдется открытое покрытие $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ такое, что $E|_{U_\alpha \times [0,1]}$ тривиально для любого α.
(3) Пусть E – векторное расслоение над $X \times [0,1]$, X — компактно. Докажите, что $E|_{X\times\{0\}} \cong E|_{X\times\{1\}}$ (рассмотрите конечное подпокрытие покрытия из предыдущего пункта и соответствующее ему разбиение единицы $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$; постройте изоморфизмы $E|_{X_i} \cong E|_{X_{i+1}}$, где $X_i = \{(x, \phi_1(x) + \phi_2(x) + \ldots + \phi_i(x)) \mid x \in X\}$).
(4) Проверьте предыдущий пункт для паракомпактного пространства.
(5) Пусть $f, g\colon Y \to X$ – два гомотопных отображения, и пусть $\pi\colon E \to X$ – векторное расслоение. Докажите, что $f^*E \cong g^*E$.

Замечание 3.6. Несложно проверить, что рассуждение, аналогичное приведенному выше, дает такой же результат для главных G-расслоений.

Упражнение 3.7. Покажите, что любое векторное расслоение над стягиваемым паракомпактным пространством тривиально.

Определение 3.8. Положим $\mathbb{R}^\infty = \varinjlim_n \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Gr}_\mathbb{R}(k,\infty) = \varinjlim_n \mathrm{Gr}_\mathbb{R}(k,n)$ и $\mathcal{T}_k = \varinjlim_n \mathcal{T}_{k,n}$ (прямой предел для последовательности вложенных топологических пространств – это их объединение; открытыми множествами объявляются множества, являющиеся открытыми в пересечении с каждым из подпространств; несложно видеть, что это наиболее богатая топология на объединении, относительно которой вложения – непрерывные отображения). Проверьте, что $\mathcal{T}_k$ является векторным расслоением ранга k над $\mathrm{Gr}_\mathbb{R}(k,\infty)$.

Упражнение 3.9. Пусть $\pi\colon E \to X$ – векторное расслоение ранга k.

(1) Покажите, что задать отображение $f\colon X \to \mathrm{Gr}_\mathbb{R}(k,\infty)$ и изоморфизм $E \cong f^*\mathcal{T}_k$ все равно, что задать отображение $g\colon E \to \mathbb{R}^\infty$ инъективное и линейное на слоях.
(2) Используя счетное покрытие, тривиализирующее E, и соответствующее разбиение единицы, покажите, что найдется некоторое отображение $f\colon X \to \mathrm{Gr}_\mathbb{R}(k,\infty)$ такое, что $E \cong f^*\mathcal{T}_k$.
(3) Покажите, что если $E \cong f_0^*E$ и $E \cong f_1^*E$ для $f_0, f_1\colon X \to \mathrm{Gr}_\mathbb{R}(k,\infty)$, то f_0 гомотопно f_1. Для этого рассмотрите соответствующие отображения g_0, g_1; прогомотопируйте их (сохраняя линейность и инъективность на слоях) так, чтобы образ g_0 лежал в подпространстве, порожденном четными базисными векторами, а образ g_1 – в подпространстве, порожденном нечетными базисными векторами. Затем прогомотопируйте получившиеся отображения друг в друга.

Теорема 3.10 (следует из упражнений 3.5 и 3.9)**.** Пусть X – паракомпактное пространство. Тогда соответствие $f \mapsto f^*\mathcal{T}_k$ устанавливает биекцию

$$[X, \mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(k,\infty)] \cong Vect_k(X)$$

между множеством классов гомотопической эквивалентности отображений из X в $\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(k,\infty)$ и множеством классов изоморфизма векторных расслоений ранга k над X.

Замечание 3.11. Аналогичное утверждение можно получить и для комплексных векторных расслоений.

Упражнение 3.12. Покажите, что для векторного расслоения $\pi\colon E \to X$ ранга k найдется векторное расслоение E' такое, что $E \oplus E'$ тривиально.

Упражнение 3.13. Положим $M^o_{\mathbb{R}}(k,\infty) = \varinjlim_n M^o_{\mathbb{R}}(k,n)$. Покажите, что $M^o_{\mathbb{R}}(k,\infty)$ – стягиваемое пространство.

Замечание 3.14. Для топологической группы G *универсальным главным G–расслоением* называется такое главное G-расслоение $EG \to BG$, что тотальное пространство EG стягиваемо; в этой ситуации BG называется классифицирующем пространством группы. Упражнение выше показывает, что $M^o_{\mathbb{R}}(k,\infty) \to \mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(k,\infty)$ – главное $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$-расслоение. Для замкнутой подгруппы $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ можно построить универсальное расслоение как $M^o_{\mathbb{R}}(k,\infty) \to M^o_{\mathbb{R}}(k,\infty)/G$. Кроме того, можно показать, что имеет место естественная биекция

$$[X, BG] \cong \check{\mathrm{H}}^1(X, G),$$

задаваемая $f \mapsto f^*EG$.

Факт 3.15. Пусть $E \to X$ – локально тривиальное расслоение со слоем F. Тогда имеется длинная точная *последовательность расслоения*

$$\ldots \to \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(X) \to \pi_{n-1}(F) \to \pi_{n-1}(E) \to \ldots \to \pi_0(X)$$

Замечание 3.16. Посмотрев на расслоение $EG \mapsto BG$ со слоем G можно понять, что $\pi_n(BG) = \pi_{n-1}(G)$. В частности,

$$\check{\mathrm{H}}^1(S^n, \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})) \cong \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})).$$

Последнее отождествление можно описать и явно: разобъем сферу S^n на северное и южное полушарие. Оба полушария стягиваются, поэтому любое векторное расслоение над ними тривиально. Таким образом, чтобы задать векторное расслоение над S^n необходимо взять тривиальные расслоения над полушариями и склеить их вдоль экватора S^{n-1}. Функция, вдоль которой производится склейка, и есть отображение $f\colon S^{n-1} \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$. Можно показать, что класс изоморфизма получаемого расслоения зависит только от класса гомотопической эквивалентности отображения f.

Упражнение 3.17. Опишите классы изоморфизма векторных расслоений над S^1.

Упражнение 3.18. Опишите классы изоморфизма векторных расслоений ранга 2 на S^n,

(1) $n \geq 3$,
(2) * $n = 2$.

Замечание 3.19. Можно показать, что для абелевой группы G (некоторую модель) пространства BG тоже можно снабдить структурой абелевой группы. Таким образом можно определить $B^2G = BBG, B^3G, \ldots$. Изучая последовательность расслоения для дискретной группы G можно увидеть, что $\pi_n(B^nG) \cong G$, $\pi_m(B^nG) = 0$ при $m \neq n$. Такое пространство обозначается $K(G,n)$ и называется пространством Эйленберга-Маклейна.

4. Алгебраический взгляд на векторные расслоения

Соглашение 4.1. В этом разделе все кольца, если не оговорено противное, предполагаются коммутативными, ассоциативными и с единицей, а все модули – конечнопорожденными.

Упражнение 4.2. Пусть X – компактное топологическое пространство. Покажите, что все максимальные идеалы в $C_{\mathbb{R}}(X)$ имеют вид $\mathfrak{m}_x = \{f \in C_{\mathbb{R}}(X) \mid f(x) = 0\}$.

Определение 4.3. *Максимальным спектром* кольца R называется множество $\mathrm{Specm}(R)$ максимальных идеалов R. Замкнутые множества в *топологии Зарисского* на $\mathrm{Specm}(R)$ определяются как $V(I) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R) \mid I \subset \mathfrak{m}\}$, где I – идеал кольца R.

Упражнение 4.4. Проверьте, что для компактного пространства X имеет место гомеоморфизм $X \cong \mathrm{Specm}(C_{\mathbb{R}}(X))$.

Упражнение 4.5. Верно ли утверждение предыдущего упражнения для некомпактного X?

Определение 4.6. *Проективным модулем* над кольцом R называется модуль P для которого существует некоторый модуль Q такой, что $P \oplus Q \cong R^n$.

Упражнение 4.7. Постройте биекцию между множеством пар (P, θ), где P – проективный R-модуль, а $\theta\colon P \oplus Q \xrightarrow{\cong} R^n$ – изоморфизм, и множеством идемпотентов в $M_n(R)$ (*идемпотентом* называется элемент e такой, что $e^2 = e$).

Упражнение 4.8. Докажите, что модуль P проективен тогда и только тогда, когда для любого сюръективного гомоморфизма R-модулей $f\colon M \to N$ индуцированное отображение $f_*\colon \mathrm{Hom}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_R(P, N)$ сюръективно.

Упражнение 4.9 (Лемма Накаямы). Пусть R – локальное кольцо (т.е. существует единственный максимальный идеал) с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и M – конечнопорожденный модуль над R. Докажите, что, если $\mathfrak{m}M = M$, то $M = 0$ (сначала проверьте, что для $m \in \mathfrak{m}$ и обратимого a элемент $a + m$ обратим; затем покажите, что любой набор порождающих M можно уменьшить).

Упражнение 4.10. Докажите, проективный модуль над локальным кольцом свободен.

Упражнение 4.11. Покажите, что модуль P над R проективен тогда и только тогда, когда для любого максимального идеала $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)$ найдется $f \in R \setminus \mathcal{M}$ такой, что P_f свободен над R_f (здесь индекс f означает локализацию, $R_f = R[f^{-1}]$, $P_f = P \otimes_R R_f$).

Упражнение 4.12. Пусть $\pi\colon E \to X$ – векторное расслоение над компактным пространством X. Покажите, что модуль сечений $\Gamma(E, X) := \{s\colon X \to E \mid \pi \circ s = \mathrm{id}_X\}$ проективен как модуль над $C_{\mathbb{R}}(X)$.

Упражнение 4.13 (Соответствие Серра-Суона). Пусть X – компактное пространство и P – проективный модуль над $C_{\mathbb{R}}(X)$. Покажите, что найдется некоторое векторное расслоение $E \to X$ такое, что $\Gamma(E, X) \cong P$ и докажите, что правило $E \mapsto \Gamma(E, X)$ задает биекцию между классами изоморфизма векторных расслоений над X и классами изоморфизма проективных модулей над $C_{\mathbb{R}}(X)$.

Упражнение 4.14. Приведите пример проективного модуля P над R такого, что $P \oplus R$ – свободный, а P – нет (воспользуйтесь упражнением 1.16).

Упражнение 4.15. Покажите, что любой проективный модуль над областью главных идеалов свободен.

Упражнение 4.16. Покажите, что любой проективный модуль над $k[t]$ свободен (k – поле).

Упражнение 4.17. Покажите, что любой проективный модуль над $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ свободен.

Упражнение 4.18. Придумайте проективный модуль над $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$, не являющийся свободным.

Упражнение 4.19. Проверьте, что для гладкого компактного пространства X имеет место гомеоморфизм $X \cong \mathrm{Specm}(C^\infty_\mathbb{R}(X))$.

Упражнение 4.20. Пусть γ – кривая на гладком многообразии X, $\gamma(0)=x$. Сопоставим каждой функции $f \in C^\infty_\mathbb{R}(X)$ число $A_\gamma(f) = \frac{d}{dt}f(\gamma(t))|_{t=0}$. Покажите, что

(1) функционал A_γ линеен и удовлетворяет тождеству Лейбница, $A_\gamma(fg) = A_\gamma(f)g(x) + f(x)A_\gamma(g)$,
(2) если $f \in \mathfrak{m}_x^2$, то $A_\gamma(f) = 0$,
(3) если $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=x$, $\gamma_1'(0)=\gamma_2'(0)$, то $A_{\gamma_1}(f) = A_{\gamma_2}(f)$ для любого $f \in C^\infty_\mathbb{R}(X)$.

Таким образом, мы получили линейное отображение $A\colon (T_X)|_x \to (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee$.

Упражнение 4.21. * Покажите, что построенное в предыдущем упражнении отображение $A\colon (T_X)|_x \to (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee$ – изоморфизм.

Упражнение 4.22. * Пусть s – гладкое сечение касательного расслоения гладкого многообразия X. Определим отображение $S\colon C^\infty_\mathbb{R}(X) \to C^\infty_\mathbb{R}(X)$ как $S(f)(x) = (s(x)(f))(x)$. Покажите, что S является дифференцированием (т.е. линейно и удовлетворяет тождеству Лейбница) и что любое дифференцирование $C^\infty_\mathbb{R}(X)$ имеет такой вид для некоторого сечения s.

Замечание 4.23. Предыдущее упражнение показывает, что модуль гладких сечений $\Gamma^\infty(T_X, X)$ канонически отождествляется с модулем дифференцирований алгебры $C^\infty_\mathbb{R}(X)$. В частности, рассматривая коммутатор $[S_1,S_2] = S_1\circ S_2 - S_2\circ S_1$ (коммутатор двух дифференцирований снова является дифференцированием) можно определить скобку Ли векторных полей.

5. Гомологии

Определение 5.1. *Комплексом* называется последовательность абелевых групп A^n, и гомоморфизмов $d^n : A^n \to A^{n+1}$ (*дифференциалов*),

$$A^\bullet = \ldots \to A^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} A^{n+2} \to \ldots,$$

таких, что $d^{n+1}\circ d^n = 0$. Последнее условие эквивалентно тому, что образ d^n лежит в ядре d^{n+1}. *(Ко-)гомологиями* комплекса $\{A^\bullet\}$ называются группы $\mathrm{H}^n(A^\bullet) = \mathrm{Ker}\, d^n / \mathrm{Im}\, d^{n-1}$.

Замечание 5.2. Иногда индексы в членах комплекса, дифференециалах и (ко-)гомологиях пишут снизу, и дифференциалы нумеруют так: $d_n\colon A_n \to A_{n-1}$. Такие комплексы называют “гомологическими“ комплексами. От комплекса в исходном смысле $A^\bullet = \{A^n, d^n\}$ можно перейти к гомологическому $A_\bullet = \{A_n, d_n\}$, положив $A_n = A^{-n}$ и $d_n = d^{-n}$, и наоборот. Единственной причиной, по которой мы вводим в рассмотрение гомологические комплексы, является желание работать только с положительными индексами в следующем определении.

Определение 5.3. Обозначим через Δ^n выпуклую оболочку базисных векторов в стандартном базисе в $\mathbb{R}^{n+1}$. Порядок на вершинах задает гомеоморфизм между k-й гранью Δ^n (т.е. выпуклой оболочкой всех векторов, кроме e_{n+1-k}) и Δ^{n-1}. Пусть X – топологическое пространство. Обозначим $C_n = C_n(X)$ множество всех непрерывных отображений из n-мерного симплекса Δ^n в X. Любое такое отображение можно ограничить на k-ую грань и получить отображение $\Delta^{n-1} \to X$, таким образом получая отображение множеств $C_n \to C_{n-1}$. По линейности это отображение продолжается до гомоморфизма свободных абелевых групп

$\delta_n^k\colon \mathbb{Z}[C_n] \to \mathbb{Z}[C_{n-1}]$. *Сингулярным комплексом* топологического пространства X называется (гомологический) комплекс, состоящий из свободных абелевых групп $\mathbb{Z}[C_n]$ и дифференциалов $d_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\delta_n^k$,

$$C_\bullet = \ldots \to \mathbb{Z}[C_{n+1}] \xrightarrow{\sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^k\delta_{n+1}^k} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\delta_{n}^k} \mathbb{Z}[C_{n-1}] \xrightarrow{\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k\delta_{n-1}^k} \mathbb{Z}[C_{n-2}] \to \ldots$$

Сингулярными гомологиями $\mathrm{H}_n(X,\mathbb{Z})$ топологического пространства X называются когомологии его сингулярного комплекса, т.е. $\mathrm{H}_n(X,\mathbb{Z}) = \mathrm{H}_n(C_\bullet)$.

Упражнение 5.4. Проверьте, что в предыдущем определении действительно написан комплекс.

Упражнение 5.5. Посчитайте сингулярные гомологии одноточечного топологического пространства.

Упражнение 5.6. Покажите, что группа $\mathrm{H}_0(X,\mathbb{Z})$ изоморфна свободной абелевой группе с базисом, состоящим из компонент линейной связности пространства X.

Упражнение 5.7. По непрерывному отображению $f\colon S^n \to X$ можно построить элемент в $\mathrm{H}_n(X,\mathbb{Z})$ следующим способом. Сферу S^n можно естественным образом склеить из двух копий Δ^n. Таким образом получаем два отображения $f_1, f_2\colon \Delta^n \to S^n$. Покажите, что их формальная разность $[f_1] - [f_2]$ как элемент $\mathbb{Z}[C_n(X)]$ лежит в ядре d_n, и, следовательно, задаёт некоторый эленмет $\mathrm{H}_n(X,\mathbb{Z})$.

Замечание 5.8. Отображение, построенное в предыдущем упражнении, на самом деле не зависит от класса гомотопности f и задает отображение $\pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$. Можно показать, что это гомоморфизм групп; он называется *гомоморфизмом Гуревича.*

Упражнение 5.9. Докажите, что для линейно связного пространства X и точки $x_0 \in X$ гомоморфизм Гуревича $\pi_1(X,x_0) \to \mathrm{H}_1(X,\mathbb{Z})$ сюръективен.

Факт 5.10. Верно более точное утверждение: в условиях предыдущего упражнения ядро гомоморфизма Гуревича совпадает с коммутантом $[\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)]$, т.е. $\mathrm{H}_1(X,\mathbb{Z})$ – это абелианизация группы $\pi_1(X,x_0)$. Кроме того, если X линейно связно и $\pi_i(X) = \{e\}$ для всех $i < n$, где $n > 1$, то гоморфизм Гуревича $\pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ является изоморфизмом.

Замечание 5.11. Сингулярные гомологии считать по определению очень сложно, но никто на самом деле этим не занимается. К счастью, почти всегда, когда на пространстве X есть дополнительная структура, можно определить более простой комплекс, гомологии которого будут совпадать с сингулярными.

Кроме того, имеют место следующие свойства сингулярных гомологий, оказывающиеся весьма полезными при попытке что-нибудь посчитать.

(1) Гомотопическая эквивалентность $X \xrightarrow{f} Y$ индуцирует изоморфизмы $\mathrm{H}_n(X,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}_n(Y,\mathbb{Z})$ для всех n, т.е. гомологии – гомотопический инвариант.
(2) Для любых открытых $U, V \subset X$ таких, что $U \cup V = X$ существует длинная точная последовательность

$$\ldots \to \mathrm{H}_{n+1}(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}_n(U\cap V,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}_n(U) \oplus \mathrm{H}_n(V) \to \mathrm{H}_n(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}_{n-1}(U\cap V,\mathbb{Z}) \to \ldots$$

Она называется последовательностью Майера-Вьеториса.

Упражнение 5.12. Используя покрытие сферы S^n двумя стягиваемыми открытыми множествами, содержащими южную и северную полусферы, последовательность Майера-Вьеториса, Упражнение 5.5 и гомотопическую инвариантность гомологий, показать, что $\mathrm{H}_n(S^n,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Целое число, соответствующее отображению $S^n \xrightarrow{f} S^n$ посредством гомоморфизма Гуревича и изоморфизма выше называется *степенью* отображения f.

Определение 5.13. Для CW-комплекса X обозначим посредством C_n множество клеток размерности n, а X_n – n-скелет. Для каждой клетки c из C_{n+1} задано отображение $f_c\colon S^n \to X_n$, по которому c приклеивается к X_n. Заметим, что фактор-пространство X_n/X_{n-1} гомеоморфно букету $\bigvee\limits_{c'\in C_n} S^n$ (при $n>0$). При $n>0$ рассмотрим композицию

$$S^n \xrightarrow{f_c} X_n \to X_n/X_{n-1} \cong \bigvee_{c'\in C_n} S^n \xrightarrow{p_{c'}} S^n,$$

где $p_{c'}$ – отображение, стягивающее все S^n кроме одной, с номером c', в точку. Обозначим степень этой композиции $a_{c,c'}$. В случае $n=0$ положим $a_{c,c'}=1$, если $f_c(1)=c'$, $a_{c,c'}=-1$, если $f_c(-1)=c'$ и $a_{c,c'}=0$ иначе, где $1,-1$ – точки S^0. Положим $\delta_{n+1}(c)=\sum\limits_{c'\in C_n} a_{c,c'}[c']\in\mathbb{Z}[C_n]$. По линейности отображение продолжается до отображения $d_{n+1}\colon \mathbb{Z}[C_{n+1}]\to\mathbb{Z}[C_n]$, которое задается матрицей $a_{c,c'}$. Таким образом мы получаем *клеточный комплекс* пространства X

$$C_\bullet = \ldots \to \mathbb{Z}[C_{n+1}] \xrightarrow{(a_{c,c'})_{c,c'}} \mathbb{Z}[C_n] \to \ldots$$

Его гомологии $\mathrm{H}^{cell}_n(X,\mathbb{Z})=\mathrm{H}(C_\bullet)$ называются *клеточными гомологиями* пространства X.

Факт 5.14. Клеточные гомологии CW-комплекса X совпадают с его сингулярными гомологиями.

Пример 5.15. Разобъем S^2 на клетки следующим образом: две 2-клетки, соответствующие полушариям, две 1-клетки, соответствующие половинам экватора и две 0-клетки. Тогда клеточный комплекс выглядит так (не забудьте выбрать ориентиации):

$$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2$$

Получаем $\mathrm{H}^{cell}_0(X,\mathbb{Z})=\mathrm{H}^{cell}_2(X,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$, $\mathrm{H}^{cell}_1(X,\mathbb{Z})=0$.

Упражнение 5.16. * Проверьте, что в определении 5.13 действительно написан комплекс.

Упражнение 5.17. Посчитайте клеточные гомологии S^n, $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, тора $\mathbb{T}^n$ и бутылки Клейна.

Определение 5.18. Пусть $C_\bullet$ – некоторый комплекс, A – абелева группа. $C_\bullet\otimes A$ есть комплекс, членами которого являются абелевы группы $C_n\otimes A$, а дифференциалы задаются отображениями $d_n\otimes id_A\colon C_n\otimes A\to C_{n-1}\otimes A$.

Если $C_\bullet$ – сингулярный или клеточный комплекс пространства или CW-комплекса X, то гомологии $\mathrm{H}_n(C_\bullet\otimes A)$ обозначаются через $\mathrm{H}_n(X,A)$ и $\mathrm{H}^{cell}_n(X,A)$ соответственно, и называются гомологиями X с коэффициентами в A. Имеет место канонический изоморфизм $\mathrm{H}_n(X,A)\cong\mathrm{H}^{cell}_n(X,A)$.

Упражнение 5.19. Посчитайте $\mathrm{H}_i(\mathbb{R}\mathrm{P}^n,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ и поймите, что вообще говоря $\mathrm{H}_i(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\neq \mathrm{H}_i(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Упражнение 5.20. Напомним, что Эйлеровой характеристикой конечного CW-комплекса X называется число $\chi(X)=\sum\limits_{k=0}^{\dim X}(-1)^n c_n$, где c_n – количество клеток размерности n. Покажите, что $\chi(X)=\sum\limits_{k=0}^{\dim X}(-1)^n\dim\mathrm{H}_n(X,\mathbb{Q})$. В частности $\chi(X)$ не зависит от клеточного разбиения и является гомотопическим инвариантом.

Определение 5.21. Пусть Y – подпространство X. Тогда сингулярный комплекс $C_\bullet(Y)$ оказывается вложен в сингулярный комплекс $C_\bullet(X)$. *Относительными гомологиями пары* называются гомологии фактор-комплекса

$$C_\bullet(X)/C_\bullet(Y) = \ldots \to C_{n+1}(X)/C_{n+1}(Y) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X)/C_n(Y) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X)/C_{n-1}(Y) \to \ldots,$$

где дифференциал индуцирован дифференциалом на $C_\bullet(X)$; $\mathrm{H}_n(X,Y) = \mathrm{H}_n(C_\bullet(X)/C_\bullet(Y))$. Аналогичное определение можно дать для гомологий с коэффициентами.

Факт 5.22. (1) Имеет место длинная точная *последовательность пары* (X,Y)

$$\ldots \to \mathrm{H}_n(Y,A) \to \mathrm{H}_n(X,A) \to \mathrm{H}_n(X,Y,A) \to \mathrm{H}_{n-1}(Y,A) \to \ldots \to \mathrm{H}_0(X,Y,A) \to 0$$

Это частный случай более общей конструкции (проверьте): для короткой точной последовательности комплексов (строчки точны, все квадраты коммутируют)

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "d"] & \vdots \arrow[d, "d"] & \vdots \arrow[d, "d"] & \\
0 \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & Q_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & R_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "d"] & Q_n \arrow[r] \arrow[d, "d"] & R_n \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & Q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

имеет место длинная точная последовательность

$$\ldots \to \mathrm{H}_{n+1}(R_\bullet) \to \mathrm{H}_n(P_\bullet) \to \mathrm{H}_n(Q_\bullet) \to \mathrm{H}_n(R_\bullet) \to \mathrm{H}_{n-1}(P_\bullet) \to \ldots$$

(2) Два отображения пар $f, g\colon (X,Y) \to (X',Y')$ называются гомотопными, если существует гомотопия пар $h_t\colon (X \times [0,1], Y \times [0,1]) \to (X',Y')$ такая, что $h_0 = f, h_1 = g$ и $h_t(Y \times [0,1]) \subset Y'$. Гомотопическая эквивалентность пар $f\colon (X,Y) \to (X',Y')$ индуцирует изоморфизм $\mathrm{H}_n(X,Y,A) \cong \mathrm{H}_n(X',Y',A)$ (проверьте, это следует из длинной точной последовательности).

(3) Если Y – «хорошее» подпространство (Y непустое замкнутое и существует окрестность Y в X, для которой Y – деформационный ретракт), то $\mathrm{H}_n(X,Y,A) = \mathrm{H}_n(X/Y,A)$ при $n > 0$.

Замечание 5.23. Пусть X – CW-комплекс. Тогда клеточный комплекс $C_\bullet^{cell}(X)$ можно определить с помощью относительных гомологий следующим образом. Если положить $X_{-1} = \emptyset$, то $\mathrm{H}_n(X_n, X_{n-1})$ можно канонически отождествить с $C_n^{cell}(X)$. Кроме того, дифференциал $d_n\colon \mathrm{H}_n(X_n, X_{n-1}) \to \mathrm{H}_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$ можно определить как композицию отображения $\mathrm{H}_n(X_n, X_{n-1}) \xrightarrow{p_n} \mathrm{H}_{n-1}(X_{n-1})$ из длинной точной последовательности

$$\ldots \to \mathrm{H}_n(X_{n-1}) \to \mathrm{H}_n(X_n) \to \mathrm{H}_n(X_n, X_{n-1}) \xrightarrow{p_n} \mathrm{H}_{n-1}(X_{n-1}) \to \ldots$$

с отображением $\mathrm{H}_n(X_{n-1}) \xrightarrow{i_n} \mathrm{H}_n(X_{n-1}, X_{n-2})$ из длинной точной последовательности

$$\ldots \to \mathrm{H}_{n-1}(X_{n-2}) \to \mathrm{H}_{n-1}(X_{n-1}) \xrightarrow{i_n} \mathrm{H}_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \to \ldots$$

Из точности длинной точной последовательности пары сразу следует, что $p_{n-1} i_n = 0$, следовательно $d^2 = i_{n-1} p_{n-1} i_n p_n = 0$, то есть $C_\bullet^{cell}(X)$ действительно является комплексом.

Упражнение 5.24. Пусть $E \to S^1$ – линейное расслоение, соответствующее листу Мёбиуса. Посчитайте $\mathrm{H}_n(E, E - z(X), \mathbb{Z})$ и $\mathrm{H}_n(E, E - z(X), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, где $z(X)$ – нулевое сечение.

Упражнение 5.25. * Пусть $E \to X$ – векторное расслоение. Выразите $\mathrm{H}_n(E, E - z(X), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ через $\mathrm{H}_n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, где $z(X)$ – нулевое сечение.

Упражнение 5.26. * Для пары подпространств $Y \subset U \subset X$ таких, что Y замкнуто и U открыто, рассмотрим естественное отображение $\mathrm{H}_n(X - Y, U - Y) \to \mathrm{H}_n(X, U)$. Покажите, что оно является изоморфизмом. Этот факт называется изоморфизмом вырезания.

6. Когомологии

Определение 6.1. По топологическому пространству X можно построить комплекс $C^\bullet(X)$, двойственный к его сингулярному комплексу $C_\bullet(X)$.

$$C^\bullet(X) = \ldots \to \mathrm{Hom}(C_{n-1}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(d_n, \mathbb{Z})} \mathrm{Hom}(C_n, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(d_{n+1}, \mathbb{Z})} \mathrm{Hom}(C_{n+1}, \mathbb{Z}) \to \ldots$$

Когомологиями $\mathrm{H}^n(X, \mathbb{Z})$ пространства X называются когомологии $\mathrm{H}^n(C^\bullet(X))$ комплекса $C^\bullet(X)$. Введем также обозначение для суммы когомологий всех степеней $\mathrm{H}^*(X, \mathbb{Z}) = \bigoplus\limits_{n \geq 0} \mathrm{H}^n(X, \mathbb{Z})$.

Упражнение 6.2. Определите когомологии с коэффициентами в абелевой группе A.

Упражнение 6.3. Определите клеточные когомологии.

Упражнение 6.4. Покажите, что есть каноническое отображение $\mathrm{H}^n(X, A) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_n(X, A), A)$. Верно ли, что оно изоморфизм?

Упражнение 6.5. Покажите, что $\mathrm{H}^n(X, A) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_n(X, A), A)$, если A – поле. Также покажите, что $\mathrm{H}_n(X, A) \cong \mathrm{H}_n(X, \mathbb{Z}) \otimes A$, если A – плоский модуль над $\mathbb{Z}$.

Упражнение 6.6. Пользуясь тем, что $\mathrm{H}_0(X, \mathbb{Z})$ – свободная абелева группа (см. упражнение 5.6), покажите, что $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$.

Замечание 6.7. Аналогично определению 5.21 можно ввести относительные когомологии $\mathrm{H}^n(X, Y, \mathbb{Z})$ как когомологии комплекса $\mathrm{Hom}(C_\bullet(X)/C_\bullet(Y), \mathbb{Z})$. Аналоги утврeждений из 5.11, 5.22 и 5.26 также имеют место быть, но все стрелки меняют свое направление. Таким образом,

(1) Имеет место длинная точная *последовательность пары* (X, Y)

$$0 \to \mathrm{H}^0(X, Y, A) \to \ldots \to \mathrm{H}^n(X, Y, A) \to \mathrm{H}^n(X, A) \to \mathrm{H}^n(Y, A) \to \mathrm{H}^{n+1}(X, Y, A) \to \ldots$$

(2) Для любых открытых $U, V \subset X$ таких, что $U \cup V = X$ существует длинная точная последовательность

$$\ldots \to \mathrm{H}^{n-1}(U \cap V, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^n(X, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^n(U) \oplus \mathrm{H}^n(V) \to \mathrm{H}^n(U \cap V, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{n+1}(X, \mathbb{Z}) \to \ldots$$

(3) Гомотопическая эквивалентность пар $f\colon (X, Y) \to (X', Y')$ индуцирует изоморфизм $\mathrm{H}^n(X, Y, A) \cong \mathrm{H}^n(X', Y', A)$

(4) Если Y – «хорошее» подпространство (Y непустое замкнутое и существует окрестность Y в X, для которой Y – деформационный ретракт), то $\mathrm{H}^n(X, Y, A) = \mathrm{H}^n(X/Y, A)$ при $n > 0$.

(5) Для пары подпространств $Y \subset U \subset X$ таких, что Y замкнуто и U открыто, естественное отображение $\mathrm{H}^n(X, U) \to \mathrm{H}^n(X - Y, U - Y)$ является изоморфизмом.

Упражнение 6.8. Пусть R – коммутативное кольцо с единицей. Определим умножение $C^i(X, R) \otimes C^j(X, R) \to C^{i+j}(X, R)$ следующим образом:

$$f \otimes g \mapsto ((\Delta^{i+j} \xrightarrow{s} X) \mapsto f(s \circ r_1) g(s \circ r_2))$$

где r_1 – вложение выпуклой комбинации первых i вершин в Δ^{i+j} и r_2 – вложение выпуклой комбинации последних j вершин в Δ^{i+j}. Проверьте, что эта операция ограничивается на ядра дифференциалов и пропускается через факторизацию по образам, то есть дает корректно заданное ассоциативное и дистрибутивное умножение $H^i(X,R) \otimes H^j(X,R) \xrightarrow{\cup} H^{i+j}(X,R)$, называемое cup-произведением.

Упражнение 6.9. Существует ли единица для cup-произведения? Если да, то какая?

Упражнение 6.10. Пусть X – ориентируемая компактная поверхность рода g. Упражнение 5.10 позволяет явно выписать базис как множество образующих петель. Выберем в качестве образующих в H^1 двойственный базис. Вычислите cup-произведение на когомологиях.

Упражнение 6.11. Аналогичным образом посчитайте умножение в когомологиях $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Упражнение 6.12. Для любого непрерывного отображения $X \xrightarrow{f} Y$ существует естественное отображение на сингулярных комплексах $C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$, которое каждому отображению $\Delta^n \xrightarrow{g} X$ сопоставляет композицию fg. Покажите, что оно индуцирует отображение $\mathrm{H}^i(Y,R) \xrightarrow{f^*} \mathrm{H}^i(X,R)$ и что последнее отображение является гомоморфизмом R-алгебр.

Упражнение 6.13. Определите аналогичным образом умножение в $\mathrm{H}^*(X,Z,R)$. Будет ли оно иметь единицу? Проверьте, что отображение пар $(X,Z) \xrightarrow{f} (Y,W)$ точно так же индуцирует отображение $\mathrm{H}^i(Y,W,R) \xrightarrow{f^*} \mathrm{H}^i(X,Z,R)$, являющееся гомоморфизмом R-алгебр.

Упражнение 6.14. Для любого непрерывного отображения $X \xrightarrow{f} Y$ существует естественное отображение на сингулярных комплексах $C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$, которое каждому отображению $\Delta^n \xrightarrow{g} X$ сопоставляет композицию fg. Покажите, что оно индуцирует отображение $\mathrm{H}^i(X,R) \xrightarrow{f^*} \mathrm{H}^i(Y,R)$ и что последнее отображение является гомоморфизмом R-алгебр.

Определение 6.15. Пусть X, Y – топологические пространства. Обозначим через p_X, p_Y проекции с $X \times Y$ на соответствующие сомножители. Кросс-произведением называется отображение $\mathrm{H}^i(X,R) \otimes_R \mathrm{H}^j(Y,R) \xrightarrow{\times} \mathrm{H}^{i+j}(X \times Y, R)$, определяемое формулой $\alpha \otimes \beta \mapsto p_X^*(\alpha) \cup p_Y^*(\beta)$.

Кроме того, аналогично определяется отображение $\mathrm{H}^i(X,A,R) \otimes_R \mathrm{H}^j(Y,R) \xrightarrow{\times} \mathrm{H}^{i+j}(X \times Y, A \times Y, R)$.

Упражнение 6.16. Проверьте, что кросс-произведение является корректно заданным гомоморфизмом R-модулей.

Упражнение 6.17. Проверьте, что кросс-произведение коммутирует с пуллбеками в следующем смысле. Пусть $(X,Z), (X',Z')$ – пары, $(X',Z') \xrightarrow{f} (X,Z)$ – отображение пар, Y – топологическое пространство. Тогда следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^i(X,Z,R) \otimes_R \mathrm{H}^j(Y,R) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "f^* \otimes id"] & \mathrm{H}^{i+j}(X \times Y, Z \times Y, R) \arrow[d, "(f \times id)^*"] \\
\mathrm{H}^i(X',Z',R) \otimes_R \mathrm{H}^j(Y,R) \arrow[r, "\times"] & \mathrm{H}^{i+j}(X' \times Y, Z' \times Y, R)
\end{tikzcd}$$

Факт 6.18. Кросс-произведение также коммутирует с гомоморфизмом $\mathrm{H}^n(Z,R) \overset{\delta_{(X,Z)}}{\to} \mathrm{H}^{n+1}(X,Z,R)$ из длинной точной последовательности пары. Строго говоря, следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^n(Z,R)\otimes_R \mathrm{H}^m(Y,R) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "\delta_{(X,Z)}\otimes id"] & \mathrm{H}^{n+m}(Z\times Y,R) \arrow[d, "\delta_{(X\times Y, Z\times Y)}"] \\
\mathrm{H}^{n+1}(X,Z,R)\otimes_R \mathrm{H}^m(Y,R) \arrow[r, "\times"] & \mathrm{H}^{n+m+1}(X\times Y, Z\times Y,R)
\end{tikzcd}$$

для любой пары (X,Z).

Упражнение 6.19. * Пусть Y – такое пространство, что $H^i(Y,R)$ – свободные модули над R конечного ранга. Используя индукцию по размерности, замечание 6.7, упражнение 6.17 и факт 6.18, покажите, что кросс-произведение $\bigoplus\limits_{i+j=n} \mathrm{H}^i(X,Z,R)\otimes_R \mathrm{H}^j(Y,R) \overset{\times}{\to} \mathrm{H}^n(X\times Y, Z\times Y,R)$ является изоморфизмом для любой конечной CW-пары (X,Z). Этот изоморфизм называется формулой Кюннета.

Замечание 6.20. Условие на свободность модулей в предыдущем упражнении важно, однако, есть альтернативный способ доказывать формулу Кюннета, позволяющий получить некоторый ответ даже в случае, когда $\mathrm{H}^i(Y,R)$ не свободны.

Например, если $R=\mathbb{Z}$, то существует точная последовательность (причем расщепляющаяся не каноническим образом)

$$0\to \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{H}^i(X,R)\otimes_R \mathrm{H}^j(Y,R) \to \mathrm{H}^n(X\times Y,R)\to \bigoplus_{i+j=n+1} \mathrm{Tor}(\mathrm{H}^i(X,R),\mathrm{H}^j(Y,R))\to 0$$

где $\mathrm{Tor}(A,B)$ – некоторая явно и просто считаемая группа.

Факт 6.21. Для любых $\alpha\in \mathrm{H}^i(X,R), \beta\in \mathrm{H}^j(X,R)$ $\alpha\cup\beta = (-1)^{ij}\beta\cup\alpha$.

Упражнение 6.22. Проверьте, что если снабдить R-модуль $\mathrm{H}^*(X,R)\otimes_R \mathrm{H}^*(Y,R)$ умножением, задаваемым формулой $(\alpha\otimes\beta)(\alpha'\otimes\beta') = (-1)^{|\beta||\alpha'|}(\alpha\alpha')\otimes(\beta\beta')$, где $\alpha'\in \mathrm{H}^{|\alpha'|}(X,R)$ и $\beta\in \mathrm{H}^{|\beta|}(X,R)$, то кросс-произведение становится гомоморфизмом колец.

Упражнение 6.23. Посчитайте кольцо когомологий тора $\mathrm{H}^*(\mathbb{T}^n,\mathbb{Z})$.

Упражнение 6.24. * Посчитайте кольца когомологий $\mathrm{H}^*(\mathbb{R}\mathrm{P}^n,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \mathrm{H}^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n,\mathbb{Z})$. Покажите, что $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ не гомеоморфно $S^2\bigvee S^4$.

Определение 6.25. Пусть G – топологическая абелева группа. И пусть $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ – открытое покрытие топологического пространства X. Для $\alpha\in I^n$ обозначим через U_α пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^n U_{\alpha_i}$. Отображение $\prod\limits_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in I^n} G(U_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}) \overset{\delta_k^n}{\to} \prod\limits_{\alpha\in I^{n+1}} G(U_\alpha)$ определим следующим образом. Элементу $G(U_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n})$ оно сопоставляет последовательность его ограничений на $U_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1})}$ для всех $\alpha_{n+1}\in I$. *Комплексом Чеха* называется (когомологический) комплекс

$$\check{\mathrm{C}}^\bullet(\mathcal{U},G) = 0\to \prod_{\alpha\in I} G(U_\alpha)\to\ldots\to \prod_{\alpha\in I^n} G(U_\alpha) \overset{d^n}{\to} \prod_{\alpha\in I^{n+1}} G(U_\alpha) \xrightarrow{d^{n+1}} \ldots$$

где $d^n = \sum\limits_{k=0}^n (-1)^k\delta_k^n$.

Когомологиями Чеха $\check{\mathrm{H}}^i(\mathcal{U},G)$ называются когомологии комплекса $\check{\mathrm{C}}^\bullet(\mathcal{U},G)$. Определим когомологии всего пространства $\check{\mathrm{H}}^i(X,G)$ как индуктивный предел $\varinjlim\limits_{\mathcal{U}} \check{\mathrm{H}}^i(\mathcal{U},G)$ по всем покрытиям X.

Факт 6.26. (1) Если $\mathcal{U}$ такое покрытие, что все компоненты связности всех конечных пересечений элементов покрытия стягиваемы, то $\check{\mathrm{H}}^i(\mathcal{U}, G) \cong \check{\mathrm{H}}^i(X, G)$.

(2) Для хорошего пространства X когомологии Чеха абелевой группы A, рассматриваемой как дискретная топологическая группа, совпадают с сингулярными когомологиями. То есть имеет место изоморфизм $\mathrm{H}^i(X, A) \cong \check{\mathrm{H}}^i(X, A)$.

Упражнение 6.27. Проверьте, что определение $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G)$ совпадает с определением, которое предлагалось дать в упражнении 2.14.

Замечание 6.28. Из результатов прошлых занятий мы видим, что $\check{\mathrm{H}}^1(X, A)$ канонически изоморфно множеству $[X, BA]$. На самом деле верен более общий факт: $\check{\mathrm{H}}^n(X, A) = [X, B^n A]$ для любой абелевой топологической группы A.

Кроме того, если A – кольцо, умножение на когомологиях индуцированно какими-то отображениями $B^i A \times B^j A \to B^{i+j} A$.

Замечание 6.29. Ещё один способ считать когомологии – с помощью когомологий де Рама. Можно определить k-дифференциальную форму на гладком многообразии M как глобальное сечение расслоения $\wedge^k(TM^*)$. Мы будем обозначать пространство k-форм через $\wedge^k(M)$. Пространство 0-форм совпадает с пространством функций, и можно определить отображение $d^0 : \wedge^0(M) \to \wedge^1(M)$, переводящее функцию в дифференцирование этой функции по векторным полям. На пространстве всех форм задано очевидное умножение и существует единственный дифференциал d^*, удовлетворяющий градуированному правилу Лейбница относительно этого умножения (т.е. $d(w \wedge v) = d(w) \wedge v + (-1)^{|v|} w \wedge v$ для любой формы w и формы v степени $|v|$) и совпадающий с d^0 на 0-формах.

Таким образом, получается комплекс де Рама:

$$\wedge^*(M) = 0 \to C^\infty(M) = \wedge^0(M) \xrightarrow{d^0} \wedge^1(M) \to \ldots \to \wedge^k(M) \to \ldots \to \wedge^n(M) \to 0$$

Его когомологии $\mathrm{H}^k_{dR}(M, \mathbb{R})$ называются когомологиями де Рама многообразия M. Умножение на формах индуцирует умножение на когомологиях, а кольцо когомологий де Рама канонически изоморфно кольцу сингулярных когомологий $\mathrm{H}^*(M, \mathbb{R})$.

7. Характеристические классы (**переписать**)

Определение 7.1. Пусть E – вещественное векторное расслоение над (паракомпактным) пространством X. Выберем скалярное произведение на расслоении E. *Пространством Тома* расслоения E называется фактор-пространство $\mathrm{Th}(E) = B(E)/S(E)$, где $B(E)$ – подрасслоение E, состоящее из единичных шаров, а $S(E)$ – подрасслоение единичных сфер.

Замечание 7.2. К пространству Тома можно относиться следующим образом: компактифицируем каждый слой одной точкой (получаем расслоение на сферы), а затем стягиваем X, вложенное в эту послойную компактификацию на бесконечности.

Определение 7.3. Для абелевой группы A и пространства с отмеченной точкой $X = (X, x)$ положим

$$\widetilde{\mathrm{H}}^*(X; A) = \ker(\mathrm{H}^*(X; A) \to \mathrm{H}^*(x; A)), \quad \widetilde{\mathrm{H}}_*(X; A) = \mathrm{coker}(\mathrm{H}_*(x; A) \to \mathrm{H}_*(X; A)).$$

Соответствующие группы называются группами *приведенных (ко-)гомологий.*

Упражнение 7.4. Пусть $E \to X$ – векторное расслоение с нулевым сечением $z\colon X \to E$. Вспомните, что имеют место канонические изоморфизмы

$$\widetilde{\mathrm{H}}^*(\mathrm{Th}(E); A) \cong \mathrm{H}^*(E, E - z(X); A), \quad \widetilde{\mathrm{H}}_*(\mathrm{Th}(E); A) \cong \mathrm{H}_*(E, E - z(X); A).$$

В частности, если A – кольцо, то имеет место каноническое спаривание

$$\mathrm{H}^*(X; A) \times \widetilde{\mathrm{H}}^*(\mathrm{Th}(E); A) \to \widetilde{\mathrm{H}}^*(\mathrm{Th}(E); A),$$

задаваемое $\cup$-произведением.

Упражнение 7.5. Пусть $E \to X$ – вещественное векторное расслоение ранга n, X – связное. Проверьте, что $\widetilde{\mathrm{H}}^n(\mathrm{Th}(E);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Нетривиальный элемент этой группы называется *классом Тома расслоения E в* $\mathrm{H}^*(-,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ и обозначается $th(E) \in \widetilde{\mathrm{H}}^n(\mathrm{Th}(E);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Используя последовательность Майера-Виеториса и тривиализующие покрытие проверьте, что гомоморфизм

$$-\cup th(E)\colon \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \widetilde{\mathrm{H}}^{*+n}(\mathrm{Th}(E);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

является изоморфизм левых $\mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-модулей. Этот изоморфизм называется *изоморфизмом Тома.*

Упражнение 7.6. Покажите, что для ориентированного вещественного расслоения ранга n (в частности, для комлпексного расслоения) можно определить класс Тома $th(E) \in \widetilde{\mathrm{H}}^n(\mathrm{Th}(E);\mathbb{Z})$ в $\mathrm{H}^*(-,\mathbb{Z})$, задающий изоморфизм Тома

$$-\cup th(E)\colon \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z}) \to \widetilde{\mathrm{H}}^{*+n}(\mathrm{Th}(E);\mathbb{Z}).$$

Замечание 7.7. Многие интересные теории когомологий обладают классами Тома. Например, в комплексной K-теории есть классы Тома для комплексных векторных расслоений (задаются комплексом Кошуля). В вещественной K-теории есть классы Тома для спинорных расслоений. Универсальная теория когомологий, обладающая классами Тома для комплексных расслоений – комплексные кобордизмы.

Упражнение 7.8. Проверьте, что определенные выше классы Тома функториальны: для отображения $f\colon Y \to X$ и векторного расслоения $E \to X$ имеет место равенство

$$th((f^*(E)) = f^{\mathrm{H}}(th(E)).$$

Упражнение 7.9. Проверьте, что определенные выше классы Тома мультипликативны: для векторных расслоений E_1, E_2 над X (ориентированных в случае целых коэффициентов) имеет место равенство

$$th(E_1 \oplus E_2) = th(E_1) \cup th(E_2).$$

Здесь $\cup$-произведение в правой части надо воспринимать как отображение

$$\mathrm{H}^*(E_1 \oplus E_2; (E_1 - z(X)) \times E_2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathrm{H}^*(E_1 \oplus E_2; E_1 \times (E_2 - z(X)); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \\ \to \mathrm{H}^*(E_1 \oplus E_2; E_1 \oplus E_2 - z(X); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Определение 7.10. Пусть $E \to X$ – ориентированное векторное расслоение ранга n. *Классом Эйлера* $e(E) \in \mathrm{H}^n(X,\mathbb{Z})$ называется образ класса Тома $th(E)$ относительно расширения носителя:

$$\widetilde{\mathrm{H}}^n(\mathrm{Th}(E);\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}^n(E, E-X;\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^n(E;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}^n(X;\mathbb{Z}).$$

Пусть $E \to X$ – векторное расслоение ранга n. *Старшим классом Штифеля-Уитни* $w_n(E) \in \mathrm{H}^n(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ называется образ класса Тома $th(E)$ относительно расширения носителя:

$$\widetilde{\mathrm{H}}^n(\mathrm{Th}(E);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}^n(E, E-X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^n(E;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}^n(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Пусть $E \to X$ – комплексное векторное расслоение ранга n. В этой ситуации класс Эйлера также называется *старшим классом Черна* $c_n(E) = e(E) \in \mathrm{H}^{2n}(X,\mathbb{Z})$.

Упражнение 7.11. Проверьте, что гомоморфизм

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[t]/(t^{n+1}) \to \mathrm{H}^*(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

задаваемый правилом $t \mapsto w_1(\mathcal{O}(-1))$, является изоморфизмом $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-алгебр.

Упражнение 7.12. Проверьте, что для линейного расслоения $L \to X$ его класс Штифеля-Уитни $w_1(L)$ равен классу этого расслоения как элемент

$$\check{\mathrm{H}}^1(X, \mathbb{R}^*) \cong \check{\mathrm{H}}^1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Определение 7.13. Пусть $E \to X$ – векторное расслоение ранга n. Определим $\mathbb{P}(E)$ как послойный фактор $E - z(X)$ по действию $\mathbb{R}^*$. Иными словами, над элементами тривилизующего покрытия $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ рассматривается тривиальное расслоение $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \times U_\alpha$, склейка происходит при помощи коцикла, задающего E.

Упражнение 7.14. Пусть $E \to X$ – векторное расслоение ранга n. Проверьте, что гомоморфизм

$$\mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})t \oplus \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})t^2 \oplus \ldots \oplus \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})t^{n-1} \to \mathrm{H}^*(\mathbb{P}(E);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

задаваемый правилом $t \mapsto w_1(\mathcal{O}(-1))$, является изоморфизмом $\mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-модулей.

Упражнение 7.15. Докажите принцип расщепления: пусть $E \to X$ – векторное расслоение ранга n. Докажите, что найдется такая замена базы $p\colon Y \to X$, что

(1) $p^{\mathrm{H}}\colon \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(Y;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ инъективно,
(2) p^*E – прямая сумма линейных расслоений.

Определение 7.16. Пусть $E \to X$ – векторное расслоение ранга n. Определим *классы Штифеля-Уитни* $w_k(E) \in \mathrm{H}^k(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ следующей формулой:

$$w_1(\mathcal{O}(-1))^n - w_1(E)w_1(\mathcal{O}(-1))^{n-1} + w_2(E)w_1(\mathcal{O}(-1))^{n-2} + \ldots + (-1)^n w_n(E) = 0.$$

Полным классом Штифеля-Уитни называется $w_t(E) = 1 + w_1(E)t + w_2(E)t^2 + \ldots$.

Упражнение 7.17. Проверьте, что для тривиального расслоения E выполняется $w_t(E) = 1$.

Упражнение 7.18. Докажите, что определенный таким образом старший класс Штифеля-Уитни совпадает с определенным ранее.

Упражнение 7.19. Докажите формулу Картана: $w_t(E_1 \oplus E_2) = w_t(E_1)w_t(E_2)$. В частности, у расслоения, имеющего тривиальное подрасслоение ранга k, последние k классов тривиальны.

Упражнение 7.20. Рассмотрим векторное расслоение E/X ранга k и обозначим нулевое сечение $z\colon X \to E$. Покажите, что последовательность пары для $(E, E - z(X))$ и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-коэффициентов можно переписать в виде

$$\ldots \to \mathrm{H}^{n-k}(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{z_*} \mathrm{H}^n(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^n(E - z(X);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^{n-k+1}(Z;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \ldots,$$

причем $z_*(a) = a \cup w_n(E)$. Проверьте аналогичный факт для ориентированного расслоения и целых коэффициентов. Эта последовательность называется *последовательностью Гизина*.

Факт 7.21 (Теорема о трубчатой окрестности)**.** Пусть $i\colon Z \to X$ – замкнутое вложение гладких многообразий. Обозначим $N_i = (i^*T_X)/T_Z$ нормальное расслоение к Z в X. Тогда найдется гладкое отображение $f\colon N \to X$ и открытые множества $Z \subset U \subset X, \quad Z \subset V \subset N$ такие, что $f \circ z = i$ ($z\colon Z \to N$ – нулевое сечение) и $f\colon V \to U$ – диффеоморфизм.

Упражнение 7.22. Пусть $i\colon Z \to X$ – замкнутое вложение гладких многообразий. Проверьте, что последовательность пары для $(X, X - Z)$ и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-коэффициентов можно переписать в следующем виде:

$$\ldots \to \mathrm{H}^{n-d}(Z;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^n(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^n(X - Z;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^{n-d+1}(Z;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \ldots,$$

где $d = \dim X - \dim Z$. Проверьте аналогичный факт для ориентированных многообразий и целых коэффициентов.

Упражнение 7.23. Пусть E – гладкое векторное расслоение ранга n над гладким многообразием X. Рассмотрим некоторое сечение $s\colon X \to E$, трансверсально пересекающее нулевое сечение $z(X)$. Обозначим $Z = s(X) \cap Z(X)$. Докажите, что образ единицы относительно композиции

$$\mathrm{H}^*(Z;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}^{*+n}(\mathrm{Th}(N_{Z/X});\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}^{*+n}(X, X-Z;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{*+n}(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

равен $w_n(E)$. Здесь $N_{Z/X}$ – нормальное расслоение к вложению $Z \to X$, первый изоморфизм – изоморфизм Тома, второй – изморфизм, связанный с трубчатой окрестностью, а последнее отображение – это расширение носителя. Докажите аналогичный факт для целых коэффициентов.

Упражнение 7.24. Посчитайте $\mathrm{H}^*(\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(k,n);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ и $\mathrm{H}^*(\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(k,\infty);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Упражнение 7.25. Сформулируйте и докажите комплексные аналоги упражнений 7.11, 7.14, 7.15, 7.18, 7.19, 7.24.

Упражнение 7.26. Пользуясь упражнением 2.5, постройте изоморфизм $T_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n} \oplus \mathcal{O}(-1) \cong (\mathcal{O}(1))^{\oplus(n+1)}$, где $T_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n}$ – касательное расслоение n-мерного проективного пространства. Вычислите полный класс Штифеля-Уитни $T_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n}$. Покажите, что билинейная операция с делением на $\mathbb{R}^n$ может существовать только при $n = 2^k$.

Упражнение 7.27. Вычислите полный класс Черна $T_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$.

Упражнение 7.28. Покажите, что $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^n}$ нельзя вложить (или погрузить) в $\mathbb{R}^{2^n+k}$, если $k < 2^n - 1$.

8. Классы Понтрягина и экзотические семимерные сферы

Определение 8.1. Пусть $E \to X$ – вещественное векторное расслоение. Определим *классы Понтрягина* как

$$p_i(E) = (-1)^i c_{2i}(E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \in \mathrm{H}^{4i}(X;\mathbb{Z}).$$

Полным классом Понтрягина называется

$$p_t(E) = 1 + p_1(E)t + p_2(E)t^2 + \dots$$

Упражнение 8.2. Проверьте, что классы Понтрягина функториальны и что $p_t(E \oplus \mathbb{1}^n) = p_t(E)$.

Упражнение 8.3. Пусть $E \to X$ – комплексное векторное расслоение. Покажите, что для комплексно-сопряженного расслоения $\overline{E}$ имеет место $c_i(\overline{E}) = (-1)^i c_i(E)$.

Упражнение 8.4. Покажите, что для вещественного векторного расслоения E имеет место изоморфизм комплексных векторных расслоений $E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \overline{E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}}$.

Упражнение 8.5. Покажите, что $2(p_t(E_1 \oplus E_2) - p_t(E_1)p_t(E_2)) = 0$.

Упражнение 8.6. Пусть E – комплексное векторное расслоение. Тогда $p_t(E) = c_t(E)c_{-t}(E)$.

Упражнение 8.7. Покажите, что для кватернионного проективного пространства имеет место изоморфизм

$$\mathrm{H}^*(\mathbb{H}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[e]/(e^{n+1}),$$

где e соответствует классу Эйлера $e(\mathcal{O}(-1))$, а $\mathcal{O}(-1)$ – тавтологическое кватернионное расслоение.

Упражнение 8.8. Покажите, что $p_t(\mathcal{O}(-1)_{\mathbb{H}\mathrm{P}^n}) = 1 - 2e(\mathcal{O}(-1)_{\mathbb{H}\mathrm{P}^n})t + e(\mathcal{O}(-1)_{\mathbb{H}\mathrm{P}^n})^2t^2$.

Определение 8.9. Определим на $\mathbb{HP}^1 = (\mathbb{H} \sqcup \mathbb{H})/(u \sim u^{-1})$ кватернионные векторные расслоения $E_{hj}, h, j \in \mathbb{Z}$, следующим образом

$$(\mathbb{H} \times \mathbb{H} \sqcup \mathbb{H} \times \mathbb{H})/((u,v) \sim (u^{-1}, \tfrac{u^h v u^j}{|u|^{h+j}})).$$

Упражнение 8.10. Проверьте, что $\mathcal{O}_{\mathbb{HP}^1}(-1) \cong E_{01}$.

Упражнение 8.11. Покажите, что $p_1(E_{hj}) = 2(h-j)e$, $e(E_{hj}) = (h+j)e$, где $e = e(\mathcal{O}_{\mathbb{HP}^1}(-1))$ (покажите, что классы линейны по h и j; покажите, что p_1 антисимметричен, а e симметричен по h, j).

Определение 8.12. M_{hj} – расслоение на трёхмерные сферы (кватернионы нормы 1) над $\mathbb{HP}^1$, соответствующее расслоению E_{hj}.

Упражнение 8.13. Вычислите когомологии M_{hj} (воспользуйтесь последовательностью Гизина для E_{hj}).

Определение 8.14. Положим $M_k = M_{hj}$ для $h + j = 1, h - j = k$.

Факт 8.15 (Двойственность Пуанкаре)**.** Пусть M – гладкое компактное ориентированное многообразие размерности n. Тогда имеет место канонический изоморфизм

$$\mathrm{H}^k(M;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}_{n-k}(M;\mathbb{Z}),$$

задаваемый правилом $\alpha \mapsto \alpha \cap [M]$, где $[M] \in \mathrm{H}_n(M;\mathbb{Z})$ – фундаментальный класс многообразия (сумма максимальных симплексов его триангуляции), а

$$\cap \colon \mathrm{H}^k(M;\mathbb{Z}) \times \mathrm{H}_m(M;\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}_{m-k}(M;\mathbb{Z})$$

– естественное спаривание гомологий и когомологий.

Определение 8.16. Пусть M – гладкое компактное ориентированное многообразие размерности $4n$. Тогда имеет место симметрическая билинейная форма

$$\mathrm{H}^{2n}(M;\mathbb{R}) \times \mathrm{H}^{2n}(M;\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^{4n}(M;\mathbb{R}) \cong \mathrm{H}_0(M;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R},$$

задаваемая правилом $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cup \beta$ и последующим отождествлением $\mathrm{H}^{4n}(M;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ посредством двойственности Пуанкаре. Сигнатура этой формы называется *сигнатурой многообразия* M и обозначается $\sigma(M)$.

Факт 8.17 (Частный случай теоремы Хирцебруха о сигнатуре)**.** Пусть M – гладкое компактное ориентированное многообразие размерности 8. Отождествим при помощи двойственности Пуанкаре $\mathrm{H}^8(M;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Тогда

$$\sigma(M) = \tfrac{1}{45}(7p_2(T_M) - p_1(T_M)^2).$$

Определение 8.18. Пусть M – гладкое компактное ориентированное многообразие, гомеоморфное S^7 (в частности, $\mathrm{H}^*(M;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}^*(S^7;\mathbb{Z})$). Пусть B – ориентированное многообразие с краем, размерности 8, такое, что $\partial B = M$. Определим *сигнатуру* B как сигнатуру билинейной формы

$$\mathrm{H}^4(B, M;\mathbb{R}) \times \mathrm{H}^4(B, M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

$(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha \cup \beta) \cap \nu$, где $\nu \in \mathrm{H}_8(B;\mathbb{R})$ – ориентация.

Обозначим $q(B) = p_1(T_B)^2 \cap \nu \in \mathbb{R}$, где $p_1(T_B) \in \mathrm{H}^4(B;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}^4(B, M;\mathbb{Z})$ и положим

$$\lambda(M) = 2q(B) - \sigma(B) \mod 7.$$

Упражнение 8.19 (*). Покажите, что $\lambda(M)$ не зависит от выбора B.

Упражнение 8.20. Покажите, что $\lambda(M_k) = k^2 - 1 \mod 7$.

Упражнение 8.21 (*). Покажите, что M_k гомеоморфно S^7. Для этого проверьте, что

$$M_k = (\mathbb{H} \times S(\mathbb{H}) \sqcup \mathbb{H} \times S(\mathbb{H}))/((u, v) \sim (u^{-1}, \tfrac{u^h v u^j}{|u|^{h+j}})),$$

где $S(\mathbb{H})$ – единичная сфера. Рассмотрите функцию $f\colon M_k \to \mathbb{R}$, заданную на первой карте правилом

$$f(u, v) = \frac{\Re v}{(1+|u|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

На пересечении карт она задается правилом

$$f(u', v') = \frac{\Re (u')^h v' (u')^{1-h}}{(1+|u'|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

поэтому положив $u'' = v'u'$ на второй карте можно задать правилом

$$f(u'', v') = \frac{\Re u''}{(1+|u''|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Поймите, что у этой функции всего две критических точки, которые невырождены.